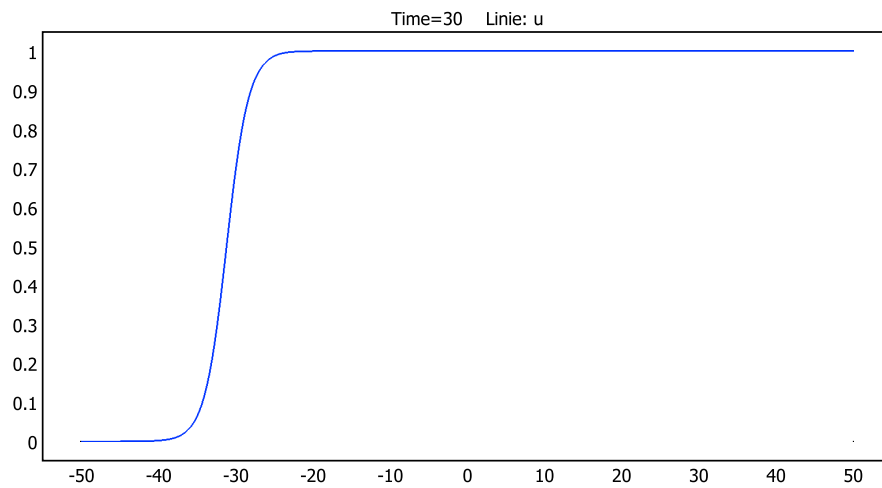


COMSOL Multiphysics Tutorial

Nonfrozen Nagumo-Equation (1D)



Denny Otten
Universität Bielefeld
Fakultät für Mathematik

Einleitung (Mathematischer Hintergrund)

Das Ziel dieses Tutorials ist die Implementierung der nicht-eingefrorenen und räumlich eindimensionalen Nagumo-Gleichung mit Hilfe von COMSOL Multiphysics. Die Namensgebung der Gleichung ist auf den japanischen Ingenieur Jin-Ichi Nagumo (1926-1999) zurückzuführen. Wir betrachten das folgende Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{aligned}u_t(x, t) - \Delta u(x, t) &= u(x, t) \cdot (1 - u(x, t)) \cdot (u(x, t) - a), & |x| < 50, t \in]0, \infty[\\ \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) &= 0, & |x| = 50, t \in [0, \infty[\\ u(x, 0) &= u_0(x), & |x| < 50, t = 0\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $a \in]0, \frac{1}{2}[$ einen reellen Kontrollparameter, $u_0 : [-50, 50] \rightarrow \mathbb{R}$ eine geeignete Anfangsfunktion und $u : [-50, 50] \times [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ die gesuchte Lösung.

1 Die nicht-eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

1. Starte **COMSOL Multiphysics**.

1.1 Modell-Navigator

2. Öffne im **Modell-Navigator** die Registerkarte **Neu**.
3. Wähle dort die Raumdimension **1D**.
4. Wähle im linken Bildteil **Anwendungsmodi** → **COMSOL Multiphysics** → **Partielle Differentialgleichungen (PDGL)** → **PDGL, Allgemeine Form** → **Zeitabhängige Analyse**.
5. Wähle unter **Abhängige Variablen** u , unter **Name des Anwendungsmodus** **PDE** und unter **Element** **Lagrange-Linear**.
6. Bestätige abschließend auf **OK**.

1.2 Konstanten festlegen

7. Wähle in der Menüleiste **Optionen** → **Konstanten...**
8. Gebe in den Spalten **Name**, **Ausdruck**, **Wert** und **Beschreibung** die in der folgenden Abbildung enthaltenen Variablen und Werte ein. Die Spalte **Wert** wird dabei automatisch aus der Spalte **Ausdruck** erzeugt.

Name	Ausdruck	Wert	Beschreibung
a	0.25	0.25	Parameter, $0 < a < 0.5$

9. Bestätige abschließend auf **OK**.

1.3 Grundgebiet erzeugen

10. Wähle in der Menüleiste **Zeichnen** → **Objekt eingeben** → **Linie...**
11. Gebe im Bereich **Koordinaten** für **x** den Wert -50 50 ein (jeweils durch ein Leerzeichen voneinander getrennt). Weiter setze **Stil** auf **Polylinie** und trage unter **Name** **Intervall_0_50** ein (50 Intervalllänge, 0 Intervallmittelpunkt).
12. Bestätige die Eingaben auf **OK**.
13. Klicke abschließend auf den Button **Auf alle Objekte zoomen** (rotes Kreuz mit einer Lupe). Alternativ geht dies auch über **Optionen** → **Zoom** → **Auf alle Objekte zoomen**.

1.4 Differentialgleichung definieren

1.4.1 PDGL, Allgemeine Form (PDE)

14. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Eintrag **PDGL, Allgemeine Form (PDE)** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

Gebietbedingungen

15. Wähle in der Menüleiste **Physik** → **Gebietbedingungen** (F8)

1 Die nicht-eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

16. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Gebiete**, markiere in der **Gebietauswahl** das Gebiet **1** durch einen Mausklick mit der linken Taste und mache einen Haken bei der Check-Box **Aktiv in diesem Bereich**.

17. In der Registerkarte **Koeffizienten** geben wir die folgenden **PDGL-Koeffizienten** ein

Koeffizient	Wert/Ausdruck	Beschreibung
Γ	$-ux$	Flussvektor
F	$u*(1-u)*(u-a)$	Quellterm
e_a	0	Massenkoeffizient
d_a	1	Dämpfung/Massen-Koeffizient

18. In der Registerkarte **Anfangsbedingung** geben wir die folgenden **Anfangswerte** ein

$u(t_0)$	$1/100*(x+50)$
$ut(t_0)$	0

19. In der Registerkarte **Element** geben wir in der **Element-Auswahl** unter **Vordefinierte Elemente** *Lagrange-Linear* ein (insofern wir dies zu Beginn vergessen haben). Die Eigenschaften **shape** (Formfunktion), **gporder** (Integrationsordnung), **cporder** (Nebenbedingungs-Ordnung) und **bnd.gporder** (Integrationsgrad für ultraschwachen Term) bleiben dabei unverändert.

20. In der Registerkarte **Schwache Form** lassen wir den Inhalt zu **Beitrag schwachen Form** unverändert.

21. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

Randbedingungen

22. Wähle in der Menüleiste **Physik** → **Randbedingungen** (F7)

23. Wähle auf der linken Seite die Registerkarte **Ränder**, markiere in der **Randauswahl** beide Ränder: Dazu markiere durch einen Mausklick mit der linken Taste den Rand 1, halte die Shift-Taste gedrückt und markiere erneut durch einen Mausklick mit der linken Taste den 2. Rand.

24. In der Registerkarte **Koeffizienten** geben wir unter **Randbedingungen** *Neumann-Randbedingung* ein. Für den **Koeffizienten** G wählen wir den **Wert/Ausdruck** 0.

25. Die Registerkarte **Schwache Form** bleibt unverändert.

26. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.5 Netz-Generierung

27. Markiere im **Modell-Verzeichnisbaum** den Modell-Namen **Geom1** durch einen Mausklick mit der linken Taste.

28. Wähle in der Menüleiste **Netz** → **Freie Netzgenerierungsparameter...** (F9)

29. In der Registerkarte **Global** stellen wir **Maximale Elementgröße** auf 0.1. Der **Maximale Skalierungsfaktor für Elementgröße** wird auf 1 und die **Elementvergrößerungsrate** auf 1.3 gesetzt.

30. Die Registerkarten **Gebiet** und **Rand** bleiben unverändert.

31. Klicke nun auf den Button **Netz generieren** und warte bis das Netz erzeugt wurde.

32. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.6 Modell lösen

1.6.1 Löserparameter

33. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Löserparameter...** (F11)

34. Wähle auf der linken Seite unter **Löser** *Zeitabhängig* und mache darunter einen Haken bei der Check-Box **Plotten während des Lösens**.

1 Die nicht-eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

35. In der Registerkarte **Allgemein**, die sich auf der rechten Seite befindet, geben wir unter **Zeitschrittsteuerung** die **Zeiten** 0:0.01:30, die **Relative Genauigkeit** 0.01 und die **Absolute Genauigkeit** 0.0010 ein. Die Check-Box **Komplexe Zahlen erlauben** bleibt deaktiviert.
36. Die Registerkarten **Zeitschrittsteuerung** und **Erweitert** bleiben in diesem Beispiel unverändert.
37. Bestätige die Eingabe mit **OK**.

1.6.2 Lösermanager

38. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Lösermanager...**
39. In der Registerkarte **Anfangswert** wählen wir unter **Anfangswert** *Anfangsbedingung* und unter **Werte für nicht zu lösende Variablen und Linearisierungspunkt** *Einstellung aus der Anfangsbedingung verwenden*.
40. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.

1.6.3 Modell lösen

41. Wähle in der Menüleiste **Lösen** → **Modell lösen...**
42. Beachte: Falls nachträglich Änderungen am Modell (z.B. Änderung der Konstanten, Randbedingungen, Gebietbedingungen, u.s.w.) vorgenommen werden, muss das Modell zunächst wieder aktualisiert werden. Dies erfolgt über die Menüleiste: **Lösen** → **Modell aktualisieren**. Das Modell muss nun erneut gelöst werden.

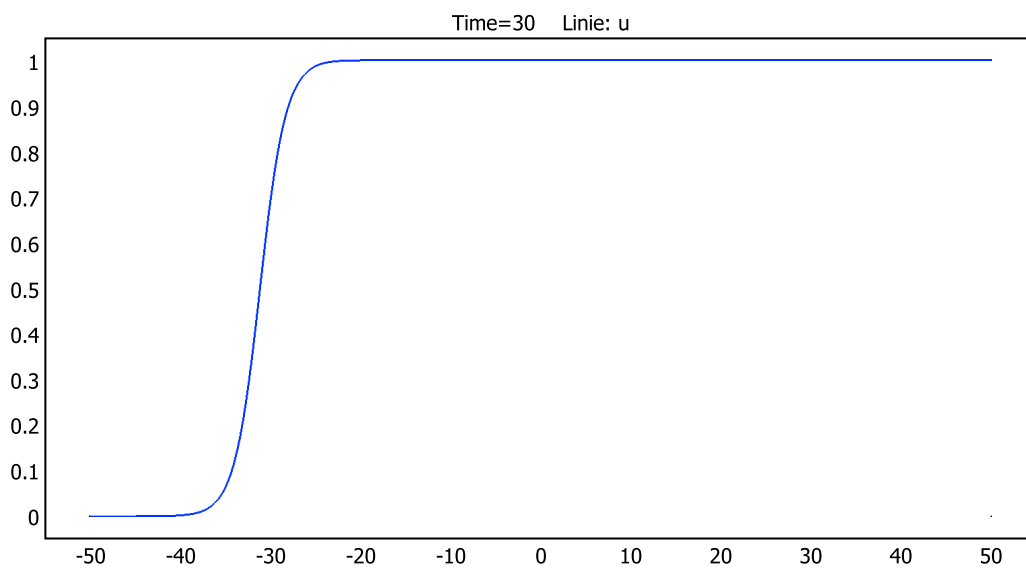
1.7 Postprozessing

1.7.1 Abbildung der Lösung

43. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Plotparameter...** (F12)
44. In der Registerkarte **Allgemein** werden Ploteigenschaften (**Linie** (Lösungsgraph durch eine Linie darstellen), **Min/Max-Markierung** (Markierung von Min/Max des Lösungsgraphen) und **Geometriebegrenzungen** (Hervorhebung der Randpunkte)) angezeigt. Beachte: Änderungen in den Plotparametern können durch einen Klick mit der linken Maustaste auf **Zuweisen** direkt (d.h. unmittelbar) angezeigt werden. Wir aktivieren die Check-Boxen **Linie** und **Geometriebegrenzungen**. Unter **zu verwendende Lösung** auf der rechten Seite können wir für **Lösung zur Zeit** einen beliebigen Zeitpunkt auswählen, zu dem wir den Lösungsgraphen betrachten wollen. Wir nehmen hier keine weiteren Änderungen vor. Unter **Darstellung innerhalb** können wir auswählen, ob der Lösungsgraph in Comsol (**Achsen**) oder in einem eigenen Abbildungsfenster (**Neue Abbildung**) angezeigt werden soll. Wir wählen an dieser Stelle **Neue Abbildung**. Unter **Titel...** können wir der Abbildung zudem eine individuelle Abbildungsüberschrift verleihen. Unter **Glätten...** können wir den Lösungsgraphen zudem glatter machen, insofern dieser unerwartete Kanten in seinem Verlauf aufweist. Wir nehmen auch hier keine weiteren Änderungen vor.
45. In der Registerkarte **Linie** können wir unter **Liniendarstellung** auswählen, ob der Funktionsgraph angezeigt werden soll. Unter **Höhendaten** lässt sich bei **Vordefinierte Größen** einstellen, ob die Lösung selbst oder eine bestimmte zeitliche (bzw. räumliche) Ableitung geplottet werden soll. Im Bereich **Linienfarbe** lässt sich unter **Einheitliche Farbe** die Farbe des Funktionsgraphen festlegen. An dieser Stelle ändern wir die Farbe des Lösungsgraphen von schwarz auf blau, indem wir auf den Button **Farbe...** klicken und uns einen entsprechenden Farbton aussuchen.
46. In der Registerkarte **Min/Max** können wir unter **Min/Max-Markierung** einstellen, ob das Minimum und Maximum der Lösung angezeigt werden sollen. Wir nehmen hier keine Änderungen vor.
47. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**.
48. Im daraufhin erscheinenden Abbildungsfenster wähle zum Speichern der Abbildung das **Diskettensymbol** in der linken oberen Ecke.

1 Die nicht-eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

49. Im Fenster **Bild exportieren** können die gewünschten Eigenschaften zum Speichern des Bildes vorgenommen werden.
50. Klicke nun auf **Exportieren...**, wähle das gewünschte Verzeichnis sowie den gewünschten Dateinamen und bestätige abschließend auf **Export**. Das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung enthalten.
51. Beachte: Hätte man in der Registerkarte **Allgemein** unter **Darstellung innerhalb** den Wert **Achsen** eingegeben, so muss die Abbildung auf eine andere Art und Weise gespeichert werden: Dazu wähle in der Menüleiste **Datei** → **Exportieren** → **Abbildung...** und fahre mit den Schritten 78 und 79 fort.

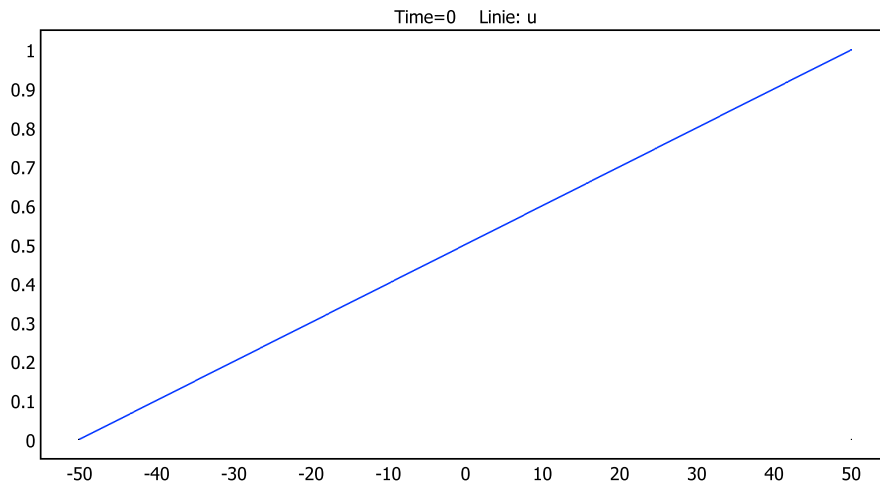


1.7.2 Animation des zeitlichen Lösungsverlaufs

52. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Plotparameter...** (F12)
53. In der Registerkarte **Animation** erstellen wir nun ohne großen Aufwand ein kleines Movie. Beachte: Diese lassen sich anschließend auch problemlos (z.B. mit dem movie15-Paket) in mit Latex erstellten Beamer-Vorträgen einbinden. Unter **Animationseinstellungen** wählen wir für den **Ausgabe-Typ** *Film*, **Dateityp** *AVI*, **Breite (in Pixeln)** *640*, **Höhe (in Pixeln)** *480* und unter **Bilder pro Sekunde** *20*. Unter **Erweitert** wählen wir als **Filmqualität** *Beste* und bestätigen auf **OK**. Beachte: Falls man die Dateigröße des Movies klein halten und zudem einen Qualitätsverlust in Kauf nehmen möchte, so sollte man unter **Erweitert** die Check-Box **Animation erstellen aus JPEG-Bildern** aktivieren (und eventuell die **Filmqualität** reduzieren). Da wir das Beste herausholen wollen, lassen wir diese deaktiviert.
54. Bestätige die Eingabe abschließend auf **Animation starten** und warte bis die Animation beendet ist.
55. Im Fenster **COMSOL-Animation**, in dem die Animation durchgelaufen ist, lässt sich die Animation durch einen Klick mit der linken Maustaste auf das Diskettensymbol speichern.
56. Im daraufhin erscheinenden Fenster **Animation speichern als** wählen wir das gewünschte Verzeichnis sowie den gewünschten Dateinamen und bestätigen die Eingaben die einen Klick mit der linken Maustaste auf den Button **Speichern**. Wir erhalten das folgende **Resultat** (Klicke mit der linken Maustaste auf das folgende Bild).

1 Die nicht-eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

57. Beachte: Um uns in diesem und in den folgenden Abschnitten etwas Zeit zu sparen, haben wir unter **Löserparameter** in der **Zeitschrittsteuerung** die **Zeiten** von 0:0.01:30 auf 0:0.1:30 abgeändert und das Modell anschließend erneut gelöst. Insofern man die Fehlermeldung *Fehler 6092 Speicherplatz überschritten bei der xmesh-Durchführung* erhält, sollte man beispielsweise (wie im vorherigen Satz vermerkt) die Zeitschrittweite und somit die Menge an gespeicherten Daten reduzieren.

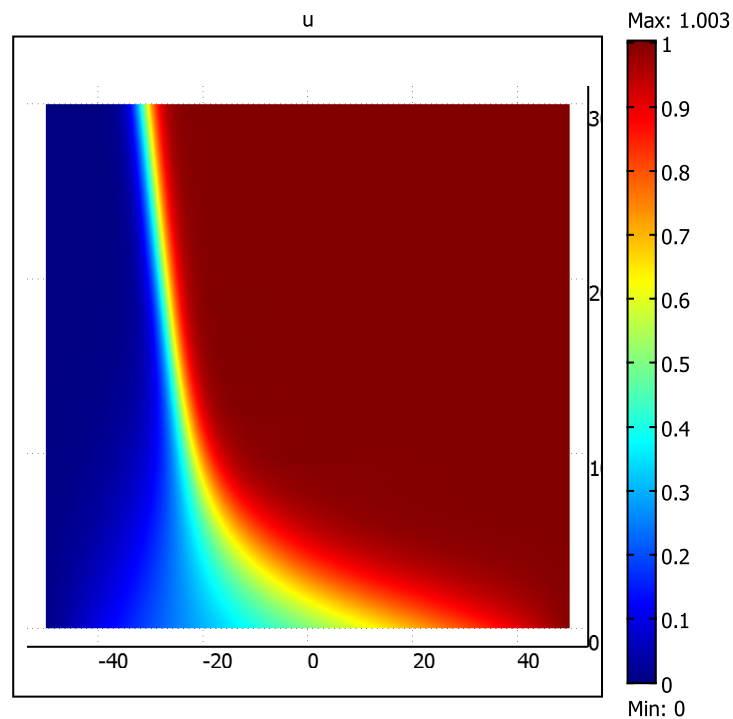
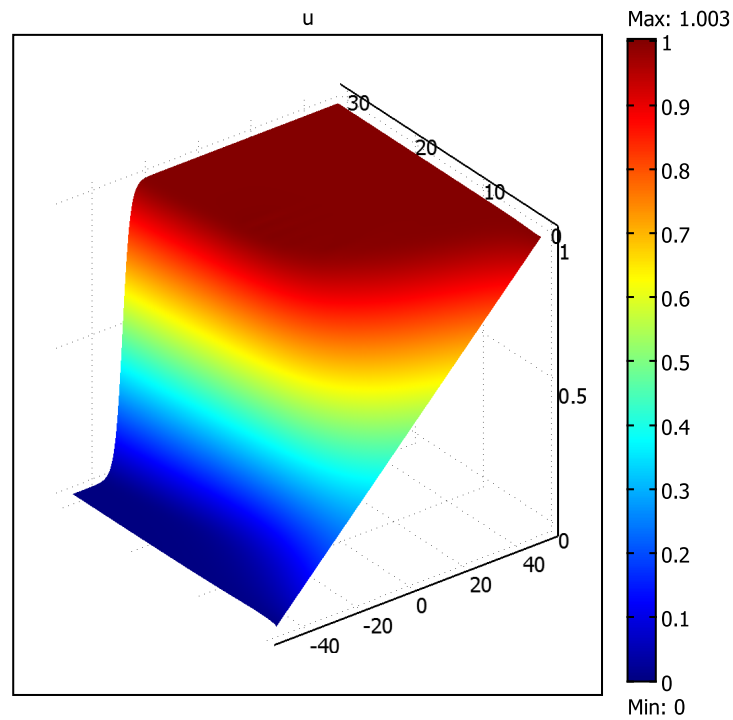


1.7.3 Modellbereiche darstellen

Zeitliche Veränderung der Wellenfront

58. Wähle in der Menüleiste **Postprozessing** → **Modellbereiche darstellen...**
59. In der Registerkarte **Allgemein** wähle unter **Plottyp** die **Linien/Extrusions-Darstellung** aus.
60. In der Registerkarte **Linie/Extrusion** setze **Plottyp** auf *Extrusionsdarstellung*. Weiter setze **Vordefinierte Größen** auf *u*.
61. Bestätige die Eingabe abschließend mit **OK**. Das Ergebnis ist in den folgenden zwei Abbildung enthalten.

1 Die nicht-eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)



1.8 Ergänzende Einstellungen

62. Wähle in der Menüleiste **Datei** → **Modelleigenschaften...**
63. In der Registerkarte **Allgemein** wählen wir für **Modellname** *Nonfrozen Nagumo-Equation (1D)*, für **Autor** *Vorname Nachname*, für **Firma** *Universität Bielefeld*, für **Abteilung** *Fakultät für Mathematik*, das Feld **Referenz** lassen wir leer und unter **URL** geben wir *<http://www.math.uni-bielefeld.de>*.

1 Die nicht-eingefrorene Nagumo-Gleichung (1D)

64. In der Registerkarte **Beschreibung** vermerken wir in der **Modellbeschreibung** *Dieses Modell berechnet die Lösung der nicht-eingefrorenen eindimensionalen Nagumo-Gleichung für das Intervall von -50 bis 50.*
65. In der Registerkarte **Bemerkung** führen wir unter **Ergebnisbeschreibung** auf *Die Lösung ist eine (mit der Zeit) wandernde Wellenfront. Die Geschwindigkeit der Front ist bei der nicht-eingefrorenen Gleichung unbekannt. Da die Geschwindigkeit ungleich 0 ist, läuft die Wellenfront generell aus dem Berechnungsbereich hinaus.*
66. Die Registerkarte **Info** wird von COMSOL automatisch ausgefüllt.
67. Bestätige die Eingabe mit **OK**.
68. Zuletzt werden wir das Modell speichern. Dazu wähle in der Menüleiste **Datei** → **Speichern unter...**
69. Wechsle im Fenster **Speichern unter** in das gewünschte Verzeichnis und gebe den **Dateinamen** *Nonfrozen-Nagumo-1D.mph* ein.
70. Bestätige die Eingabe mit **Speichern** und beende COMSOL Multiphysics.